CONVERGENCIA DE UNA FUNCIÓN DE PÉRDIDA

Svetlana Ivanovna Rudnykh[1] Ramón Antonio Matos Mareño[2],
[1]Departamento de Física, Universidad del Atlántico,Km 7 Antigua vía a Puerto Colombia, A.A. 1890, Barranquilla, Colombia, svetarudn@hotmail.com
[2]Departamento de Matemáticas, Universidad del Atlántico,Km 7 Antigua vía a Puerto Colombia, A.A. 1890, Barranquilla, Colombia,
ramonmatos_194@yahoo.es

Resumen. Se estableció la convergencia de las funciones de inventario y de pérdida, definidas en un problema de creación de inventarios para suplir las demandas constantes de un producto, con el Puente Browniano. Considerando sólo las pérdidas ocasionadas por la conservación de artículos y las surgidas cuando la cantidad de artículos en reserva es menor que la cantidad demandada, se demuestra que el limite en distribución de las funciones aleatorias de inventario y pérdidas es el puente browniano.
Palabras Claves: Problema de inventario, función de distribución empírica, prevalencia, puente browniano.

Abstract. The convergence of the functions of inventory and of loss was established, defined in an inventories creation problem to supply the constant demands of a product, with the Brownian Bridge. Considering only the caused losses by the conservation of articles and them arisen when the quantity of articles in reserve is smaller that the quantity demanded, is shown that the limit in distribution of the random functions of inventory and losses is the Brownian bridge.
Keywords: Inventory problem, empiric distribution function, prevalence, Brown's bridge.

1. Introducción

El problema de creación de reservas materiales es un caso particular del problema general de toma de decisión en condiciones de un futuro no determinado. Ver por ejemplo [1], [2], [3], [4]

En el caso analizado aquí, las reservas materiales consisten en artículos de un producto. La situación planteada supone que en diferentes momentos de tiempo, definidos previamente, se tiene la oportunidad de pedir un lote de artículos. El valor del pedido depende de la cantidad del lote solicitado; el suministro del lote pedido es realizado por una surtidora y entregado de manera aleatoria. De la entrega sólo se conoce su distribución.

Entre pedidos, se reciben demandas por los artículos, que deben ser suplidas; para estas demandas se crean las respectivas reservas (inventario). Condiciones distintas con el mismo objetivo se analizan en [5], [6], [7]

2. Función de Inventario y Función de Pérdidas

Los artículos solicitados en el momento inicial del proceso ($t = 0$) son recibidos en los momentos de tiempo $\eta_1, \eta_2, ..\eta_n$,que representan una serie variacional construida a partir de la sucesión $\xi_1, \xi_2, ..\xi_n$ de n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas según la ley uniforme en el segmento $(0, 1)$ .Para esta serie variacional se define la función de distribución, llamada *Función de distribución empírica*, con la siguiente expresión:

$$F_n^*(t) = \sum_{\eta_i \leq y} \tfrac{1}{n} = \tfrac{\text{la cantidad de } \eta_i \in (-\infty;t)}{n}$$

Entonces, la **función de inventario** $X_n(t)$ se puede escribir de siguiente forma:

$$X_n(t) = X + ZF_n^*(t) - \alpha t.$$

En el momento inicial del proceso, se tiene una cantidad X de artículos en reserva.En este momento de ($t = 0$) se pide una cantidad Z de artículos para satisfacer una demanda continua con intensidad igual a α.

La **función de pérdidas,** en el período considerado, es decir, en el intervalo $(0, 1)$ está definida, según lo anotado previamente, como la suma de los factores que forman la cantidad de artículos (a conservar o demanda dejada de suplir) por su respectivo coeficiente, en otras palabras,

$$\begin{aligned} Y \quad = \quad & h\,[\text{cantidad de artículos a conservar}] + \\ & r\,[\text{cantidad de artículos dejados de vender}] \end{aligned}$$

Las pérdidas ocasionadas por la conservación de los artículos en las condiciones del problema puede ser calculada como la integral de la función cantidad de inventario en el momento t, en los $n + 1$ intervalos de tiempo del período considerado. Para el primer intervalo, las pérdidas serían:

$$\int_0^{\min(\eta_1, \frac{x}{\alpha})} (X - \alpha t)dt.$$

En esta expresión, la integral se toma de la función de inventario, es decir, existencias en un momento de tiempo t, y cuya expresión es una línea recta, ya que la demanda es contínua con una intensidad α :

$$X_n(t) = X - \alpha t.$$

La integración de esta función se realiza desde el inicio del proceso ($t = 0$) hasta el momento $\text{mín}(\eta_1, \frac{x}{\alpha})$.

La cantidad de artículos a conservar en los siguientes $n - 1$ intervalos se obtiene mediante la expresión:

$$\sum_{k=1}^{n-1} I(x + \frac{zk}{n} - \alpha\eta_k) * \int_{\eta_k}^{\text{mín}(\eta_{k+1}, x+\frac{zk}{n})} (x + \frac{zk}{n} - \alpha t)dt$$

En este elemento, I representa la función indicador de la existencia que toma valores 0 y 1 dependiendo de si el argumento es positivo o no. Lo adecuado de esta expresión puede apreciarse en el desarrollo del segundo intervalo. Aquí, $X + \frac{z}{n} - \alpha\eta_1$ debe ser mayor que cero para que las pérdidas de conservación tengan sentido en el segundo intervalo. El factor que acompaña al indicador es la integral de la función de inventario en el momento t, después de haber recibido k veces la cantidad $\frac{z}{n}$ de pedidos. Los límites de la integración tienen la misma interpretación que la explicada para la función de cantidad de artículos de conservación en el primer intervalo.

El último sumando representa la cantidad de artículos a conservar en el $n+1$ intervalo (último). Esta cantidad se obtiene mediante la expresión:

$$I(x + z - \alpha\eta_n) * \int_{\eta_n}^{\text{mín}(1, x+z)} (x + z - \alpha t)dt$$

Por otra parte, la magnitud de pérdidas por déficit, al igual que la anterior, está formada por tres elementos, el primero de los cuales reporta la cantidad de demanda no cumplida en el primer intervalo, el segundo, la demanda no cumplida en los siguientes $n-1$ intervalos, y, el tercero, la demanda no satisfecha en el último intervalo; sus expesiones para el cálculo son:

$$\text{Demanda no cumplida en el primer intervalo} = I(\alpha\eta_1 - x) * \int_{\frac{x}{\alpha}}^{\eta_1} (x - \alpha t)dt$$

Demanda no cumplida del segundo a n intervalos =

$$= \sum_{k=1}^{n-1} I(\alpha\eta_{k+1} - x - \tfrac{zk}{n}) * \int\limits_{\text{máx}(\eta_k,(x+\frac{zk}{n})/\alpha)}^{\eta_{k+1}} (x + \tfrac{zk}{n} - \alpha t)dt$$

Demanda no cumplida en el $n+1$ intervalo =

$$= I(\alpha - x - z) * \int\limits_{\text{máx}(\eta_n,(x+z)/\alpha)}^{1} (x + z + \alpha t)dt.$$

Bajo estas condiciones, la función Y_n toma la forma:

$$\begin{aligned} Y_n &= h\left(P_1^c + \sum_{i=2}^{n} P_i^c + P_{n+1}^c\right) + \\ &\quad r\left(P_1^d + \sum_{i=2}^{n} P_i^d + P_{n+1}^d\right) \end{aligned}$$

donde,
P_i^c = Pérdidas por conservación en el intervalo i,
P_i^d =Pérdidas por déficit en el intervalo i.

Encontrar la estrategia óptima de inventario es hallar los valores de los elementos para los cuales el promedio de las pérdidas sea mínimo. Resolver este problema para el caso general que nos hemos dispuesto y expresarlo con funciones elementales no es posible. Sin embargo, al considerar que los coeficientes de pérdidas de conservación y déficit coinciden, es decir, $h = r$, el problema general se reduce a minimizar la esperanza matemática de la función de pérdida, cuya expresión es la siguiente:

$$EY_n(\omega) = hE\int_0^1 |X_n(t)|\, dt = h\int_0^1 E\,|X_n(t)|\, dt.$$

3. Convergencia de las Funciones Empíricas

De la teoría de convergencia de medidas probabilísticas son conocidos los siguientes resultados que se usaran en las aproximaciones posteriores.

Sea $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, ..\xi_{(n)}$ la serie variacional formada de las variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, ..\xi_n$ independientes y con igual distribuición uniforme en el intervalo

$[0,1]$ .Sea $G_n(t)$ la función de distribución definida para todo $t \in [0,1]$, correspondiente a la distribución uniforme de peso $\frac{1}{(n+1)}$ en cada uno de los $(n+1)$ intervalos con extremos $\left[\xi_{(i-1)}(\omega), \xi_{(i)}(\omega)\right]$, donde $\xi_{(0)} = 0, \xi_{(n+1)} = 1$.

Teorema.1

En las condiciones descritas, la función aleatoria continua $Z_n(t)$ definida como:

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(G_n(t) - t),$$

convergen en distribución al puente browniano W^o, es decir, $Z_n(t) \xrightarrow{D} W^o(\omega)$

Teorema.2

Si

$$H_n(t) = \sqrt{n}(F_n^*(t) - t),$$

donde $F_n^*(t)$ es la función de distribución empírica, definida en el apartado anterior, entonces $H_n(t) \xrightarrow{D} W^o$.

Las afirmaciones de los teoremas 1 y 2 son conocidas y sus demostraciones se encuentran en referencia [8].

4. Convergencia de la Función Inventario al Puente Browniano

Utilizando la expresión de la función inventario se puede escribir lo siguiente:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{X_n(t) - X - (Z - \alpha t)}{Z} = (F_n^*(t) - t)\sqrt{n} = H_n(t) = \xrightarrow{D} W^o$$

La expresión que contiene la función de inventario se reduce al considerar el caso particular cuando la cantidad inicial de inventario es 0 $(X = 0)$ y cuando la cantidad de artículos solicitados al inicio del proceso es igual a la intensidad de la demanda $(Z = \alpha)$.

5. Promedio del Puente Browniano

Para el cálculo del promedio del puente browniano (variable aleatoria normal con parámetros $(0, \sqrt{t(1-t)})$, con densidad igual a:

$$P\omega_t^0(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{\frac{-\tau^2}{2t(1-t)}}, \text{ para todo } \tau \text{ perteneciente a } \mathbb{R}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} E\left|\omega_t^0\right| &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|\, P\omega_t^0(\tau) d\tau \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{8}}. \end{aligned}$$

6. Promedio de Pérdidas para un caso particular

La esperanza matemática de la función aleatoria de las pérdidas cuando los coeficientes por conservación y déficit son iguales $(h = r)$ y $Z = \alpha$ se obtiene aplicando los resultados de los puntos anteriores:

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} EY_n(t,\omega) = h \int_0^1 \frac{\sqrt{n}}{z} E\left|X_n(t)\right| dt = h\frac{\sqrt{n}}{z} E\left|\omega_t^0\right| = \frac{hZ}{\sqrt{n}} \cdot \left(\tfrac{\sqrt{2\pi}}{8} + \nu(n)\right)$$

donde

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{lim} \nu(n) = 0$$

Esta expresión nos permite, conociendo los valores de los elementos que contiene, obtener la estimación para las pérdidas ocasionadas en el proceso de inventario durante un período de su desarrollo $(0, 1)$.

Referencias

[1] ARROW, K.J., MARRIS, T.E. y MARSHAK, J. Optimal Inventory Policy. En: Econometría Vol. XIX (1951); p. 250-272.

[2] ARROW, K.J., KARLIN, S. y SCARF, H. Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford: Stanford University Press, 1958.

[3] BULINSKAYA, E. Some Results Concerning Optimal Inventory Policies. En: Theory of Probability and Its Applications. Vol. 9 (1964); p. 502-507.

[4] MATOS-MAREÑO, R. Gestión de Stock con Plazo de Entrega Aleatorio. Moscú: Universidad Estatal de Moscú Lomonosov. Tesis de Maestría, 1982.

[5] KATIRCIOGLU, K. Essays in Inventory Control. University of British Columbia, Tesis, 1996; p. 7-105.

[6] TAGARAS, G. y VLACHOS, D. A periodic review inventory system with emergency replenishments. En: Management Science. Vol. 47 (2001); p. 415-429.

[7] PARLAR, M. y PERRY, D. Inventory Models of Future Supply Uncertainty with Single and Multiple Suppliers. En: Naval Research Logistics. Vol. 43 No. 2 (1996); p. 191-210

[8] BILLINGSLEY, P. Convergence of Probability Measures. New York: John Willey and Sons, 1977.