ALCANCES DEL PRIMER POSTULADO DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Ubaldo Enrique Molina y Pablo Viloria Molinares.
Grupo de Física de Particulas Elementales y Cosmología, Departamento de Física, Universidad del Atlántico, Km 7 antigua vía a Puerto Colombia, A.A. 1890, Barranquilla, Colombia, umolina@uniatlantico.edu.co

Resumen. Luego de realizar un minucioso estudio del articulo Relativity without light.de N. D. Mermin publicado en el Am. j. phys. en el año de 1984, se presentan resultados de los alcances que se obtienen al considerar el desarrollo de las Transformaciones de Lorentz y las expresiones para el intervalo espacio-tiempo bajo esta óptica. Se investiga las consecuencias y alcance de esta teoría con un solo postulado.
Palabras claves: Teoría especial de la relatividad, postulados de la teoría especial de la relatividad, transformaciones de Lorentz, intervalo espacio-tiempo.

Abstract. After carrying out a meticulous study of the I articulate Relativity without light.of N. D. Mermin published in the Am. j. phys. in the year of 1984, results of the reaches are presented that are obtained at to consider the development of the Transformations of Lorentz and the expressions for the interval space-time under this optica. It investigates itself the consequences and reach of this theory with a single advanced.
Keywords: Special theory of the relativity, advanced of the teora special of the relatividad, transformations of Lorentz, interval space-time.

1. Introducción

En este trabajo se hace una comparación entre el teorema de adición de velocidades obtenido por N. D. Mermin[2], en un articulo publicado en 1984, con la ley de adición de velocidades de Lorentz desarrolladas de sus transformaciones sin hacer uso del postulado de la constancia de la velocidad de la luz. Mediante la comparación de estos resultados se tendrá una relación entre la constante de Lorentz $\gamma(v)$ y la constante universal k del artículo, haciendo notar que se puede llegar al teorema de adición de velocidades sin el segundo postulado. De esta manera las transformaciones de Lorentz quedan expresadas en términos del parámetro γ, el cual es función de la constante universal k y de la velocidad v del marco inercial $\sum'$ respecto a $\sum$. A partir de las transformaciones de coordenadas de Lorentz en función de k, se desarrollaron las consecuencias fundamentales de estas, como son: Dilatación del tiempo, contracción de la longitud y el intervalo espacio-tiempo, las cuales permanecen inalteradas, y es así como hasta aquí la relatividad sigue siendo la misma sin el postulado de la luz.[1] , [3] , [4]

2. Transformaciones de Lorentz, Artículo de N.D. Mermin y Resultados

Mediante la descripción de dos Gedanken experimentos, N. D. Mermin, encontró el teorema de adición de velocidades para un observador $\sum$, usando unicamente el primer postulado y algunas propiedades del espacio-tiempo, obteniéndose,

$$u_x = \frac{u_x^{'} + v}{1 + k u_x^{'} v} \tag{1}$$

donde,
u_z Es la velocidad de la partícula medida en el marco $\sum$.

u_z' Es la velocidad de la partícula medida en el marco $\sum'$.

v Es la velocidad del marco $\sum'$ respecto a $\sum$.

Cambiando las coordenadas de la velocidad primadas por las no primadas y v por $-v$, se obtiene la velocidad de la parícula medida por el observador $\sum'$, la cual , será entonces[2],

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - k u_x v} \tag{2}$$

Por otra parte, recordando las transformaciones de coordenadas de Lorentz, sin usar aún el postulado de la luz[1],

$$x' = \gamma \left(x - vt\right) \tag{3}$$

$$x = \gamma \left(x' + vt'\right) \tag{4}$$

siendo γ una constante que depende de v.

De estas dos ecuaciones, eliminamos la coordenada x', obteniéndose la ecuación de transformación para la coordenada temporal,

$$x = \gamma \left[\gamma \left(x - vt\right) + vt'\right] = \gamma^2 \left(x - vt\right) + v\gamma t'$$

Al despejar t' se tiene,

$$t' = \frac{x - \gamma^2 \left(x - vt\right)}{\gamma v} = \frac{\left(1 - \gamma^2\right) x + \gamma^2 vt}{\gamma v} \tag{5}$$

Al diferenciar la ecuaciones (3) y (4), y teniendo en cuenta la definición de velocidad medida en el marco $\sum'$, se obtiene la ley de adición de velocidades de Lorentz, sin hacer uso del postulado de la constancia de la luz en función del parámetro γ,

$$u_x^{'} = \frac{dx^{'}}{dt'} = \frac{\gamma(dx-vdt)}{\frac{(1-\gamma^2)dx+\gamma^2 vdt}{\gamma v}}$$
$$u_x^{'} = \frac{\gamma^2 v(dx-vdt)}{(1-\gamma^2)dx+\gamma^2 vdt} = \frac{dx-vdt}{\frac{(1-\gamma^2)}{\gamma^2 v}dx+dt}$$

$$u_x^{'} = \frac{dx-vdt}{dt-\frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2 v}dx} = \frac{\frac{dx}{dt}-v}{1-\frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2 v}\frac{dx}{dt}}$$

Por lo tanto, la velocidad u_x' se puede escribir en la forma más explícita de la siguiente manera,

$$u_x^{'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{(\gamma^2-1)}{\gamma^2 v}u_x} = \frac{u_x - v}{1-au_xv} \tag{6}$$

siendo $a = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2 v^2}$ una constante que depende de la velocidad v, puesto que el parámetro γ depende de v. Al comparar la ecuación (2) cuyo resultado corresponde al artículo, con la ecuación (6) que se encontró a partir de las transformaciones de Lorentz usando solamente el primer postulado de la relatividad especial, se observa entonces que estas tienen la misma forma haciendo $k = a$. De esta manera se llega a una relación entre el parámetro γ de las transformaciones de Lorentz y la constante universal no negativa k, del artículo de Mermin, con lo cual, $a = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2 v^2} = k$ de donde al despejar γ, se tiene,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}} \tag{7}$$

sin usar el postulado de la luz. De aquí se deduce que cuando $k = 0$, entonces $\gamma = 1$, que corresponde con las ecuaciones de transformación Galileanas y que cuando $k = \frac{1}{c^2}$, el parámetro γ es el mismo que aparece en las ecuaciones de transformación de Lorentz. Quedando así, las ecuaciones de transformación de coordenadas de Lorentz en función del parámetro γ y la constante no negativa k. Ahora se puede expresar la ecuación de transformación para la coordenada temporal (5) en función de la constante k, obteniéndose,

$$t^{'} = \frac{\left(1-\frac{1}{1-kv^2}\right)x+\frac{vt}{1-kv^2}}{\frac{v}{\sqrt{1-kv^2}}}$$

$$t^{'} = \frac{\frac{-kv^2x+vt}{1-kv^2}}{\frac{v}{\sqrt{1-kv^2}}}$$

$$t^{'} = \frac{v(t-kvx)}{v\sqrt{1-kv^2}} = \frac{t-kvx}{\sqrt{1-kv^2}}$$

$$t^{'} = \gamma\left(t - kvx\right) \qquad ((8))$$

que corresponde a la transformación de coordenada temporal medida en el marco $\sum'$, en función del parámetro γ de Lorentz y la constante no negativa k. Se observa que cuando se usa el postulado de la constancia de la velocidad de la luz el resultado es $t' = \gamma\left(1 - \frac{vx}{c^2}\right)$, donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

En resumen, el conjunto de transformación de Lorentz sin el postulado de la luz, que relaciona las coordenadas espacio-tiempo de un evento físico medido por dos observadores inerciales en función del parámetro γ de Lorentz y la constante universal no negativa k son ,

$$t^{'} = \gamma\left(t - kvx\right)$$

$$x^{'} = \gamma\left(x - vt\right) \qquad (8)$$

$$y^{'} = y$$

$$z^{'} = z$$

las cuales corresponden a las ecuaciones de transformación de coordenadas espacio-tiempo medidos en el marco inercial $\sum'$, en función de las coordenadas del marco $\sum$.

Se encontró el conjunto de transformaciones de coordenadas de Lorentz (9), expresadas en función del parámetro γ y la constante universal no negativa k, siendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}$. Se utiliza estas ecuaciones de transformación, para desarrollar tres consecuencias fundamentales como son: Dilatación del tiempo, contracción de la longitud y el intervalo espacio-tiempo.

Para facilitar nuestra discusión sobre las propiedades de las transformaciones de Lorentz, escribiremos las ecuaciones de transformación (9), usando la notación, $\frac{1}{\sqrt{k}}t \equiv x^0$; $x \equiv x^1$; $y \equiv x^2$; $z \equiv x^3$, donde se ha utilizado la constante universal $\frac{1}{\sqrt{k}}$, la cual tiene unidades de velocidad. Con esta notación, las ecuaciones de transformación (9), quedan así,

$$t' = \gamma\left(\sqrt{k}x^0 - kvx^1\right)$$
$$x' = \gamma\left(x^1 - \sqrt{k}vx^0\right) = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x^1 - kvx^0\right)$$
$$y' = x^2$$
$$z' = x^3$$

De la misma manera, escribiendo el cambio de notación, para la coordenada temporal t', medida en el marco $\sum'$, en función de la constante universal $\frac{1}{\sqrt{k}}$, se tiene entonces que, $x'^{0} \equiv \frac{1}{\sqrt{k}}t'$ y $t' = \sqrt{k}x'^{0}$., y además, $x' \equiv x'^{1}$; $y' \equiv x'^{2}$; $z' \equiv x'^{3}$. Quedando las anteriores TL, sin el postualdo de la luz, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x'^{0} &= \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x^{0} - kvx^{1}\right) \\ x'^{1} &= \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x^{1} - kvx^{0}\right) \\ x'^{2} &= x^{2} \\ x'^{3} &= x^{3} \end{aligned} \tag{9}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}$, $\quad k \geq 0$

2.1. Dilatación del Tiempo

Sea $\triangle\tau$ el tiempo propio medido entre dos eventos por el mismo reloj. Sea $\sum$ el sistema inercial para el cual dos eventos ocurren en el mismo punto del espacio, es decir, $x_2^i = x_1^i$; $i = 1, 2, 3$.

Las coordenadas espacio-tiempo de los dos eventos medidos en el marco $\sum$ son: $\left(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3\right)$ y $\left(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3\right)$. Suponiendo que el evento 2 ocurre después que el evento 1, es decir, $x_2^0 > x_1^0$, con $\frac{\Delta\tau}{\sqrt{k}} = x_2^0 - x_1^0$, de donde $\Delta\tau = \sqrt{k}\left(x_2^0 - x_1^0\right)$

Para otro observador inercial $\sum'$ los dos eventos suceden en puntos diferentes del espacio. Las coordenadas espacio-tiempo para este obseravador son: $\left(x_1^{'0}, x_1^{'1}, x_1^{'2}, x_1^{'3}\right)$ y $\left(x_2^{'0}, x_2^{'1}, x_2^{'2}, x_2^{'3}\right)$; mientras que el intervalo de tiempo medido es[1],

$$\frac{\Delta\tau'}{\sqrt{k}} = x_2'^{0} - x_1'^{0} \tag{10}$$

Reemplazando la primera ecuación de transformación de Lorentz (10), en la ecuación (11), para los dos eventos medidos en el marco $\sum'$, teniendo en cuenta además que $x_2^i = x_1^i$, para $i = 1, 2, 3$, y desarrollando se tiene,

$$\frac{\Delta\tau'}{\sqrt{k}} = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x_2^0 - kvx_2^1\right) - \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x_1^0 - kvx_1^1\right)$$

$$\frac{\Delta\tau'}{\sqrt{k}} = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{k}x_2^0 - kvx_2^1 - \sqrt{k}x_1^0 + kvx_1^1\right]$$

$$\frac{\Delta\tau'}{\sqrt{k}} = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{k}\left(x_2^0 - x_1^0\right) - kv\left(x_2^1 - x_1^1\right)\right]$$

$$\Delta\tau' = \gamma\sqrt{k}\left(x_2^0 - x_1^0\right)$$

Por lo tanto, usando la definición de tiempo propio medido en el marco $\sum$, la ecuación anterior queda,

$$\triangle t' = \gamma \triangle \tau \tag{11}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}$. La cual tiene la misma forma que la encotrada usando los postulados de la relatividad especial.

2.2. Contracción de Longitudes

Para este caso consideramos la segunda transformación de Lorentz de $\sum' \to \sum$ que resulta de (10) al cambiar, v por $-v$, y las coordenadas primadas por las no primadas,

$$x^1 = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left(\sqrt{k}x'^1 + \sqrt{k}vx'^0\right) \tag{12}$$

Definamos la longitud de una varilla mediante la diferencia de coordenadas de los extremos $L_0 = x_2^1 - x_1^1$, en donde se ha supuesto que $x_2^1 > x_1^{'1}$ y la varilla está en reposo en el sistema $\sum$.

La longitud de la varilla medida en el sistema $\sum'$, queda determinada mediante,

$$L = x_2^{'1} - x_1^{'1} \tag{13}$$

Para encontrar la relación entre las mediciones realizadas en los marcos $\sum$ y $\sum'$, se reemplaza la ecuación de transformación (12) en la ecuación de longitud propia para el sistema $\sum$, y teniendo en cuenta que la medición en ambos sistemas deben ser simultáneas, es decir, $x_2^0 = x_1^0$ y $x_2'^0 = x_1'^0$, y además haciendo uso de la ecuación (13). Desarrollando se obtiene,

$$L_0 = x_2^1 - x_1^1 = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{k}x_2^{'1} + kvx_2^{'0} - \sqrt{k}x_1^{'1} - kvx_1^{'0}\right]$$

$$L_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{k}}\left[\sqrt{k}\left(x_2^{'1} - x_1^{'1}\right) + kv\left(x_2^{'0} - x_1^{'0}\right)\right]$$

$$L_0 = \gamma\left(x_2^{'1} - x_1^{'1}\right) = \gamma L$$

Por lo tanto,

$$L = \sqrt{1-kv^2}L_0 \tag{14}$$

donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}$. Nuevamente la longitud de una varilla se ve contraida cuando es medida por un observador en movimiento respecto a ella.

2.3. Intervalo Espacio-Tiempo

Suponga que P_1 y P_2 son dos eventos físicos cualesquiera y sea $\left(x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3\right)$ y $\left(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3\right)$ las coordenadas de los dos eventos medidos por un observador inercial $\sum$. Definimos el intervalo espacio-tiempo entre los dos eventos por:

$$\triangle S_{12}^2 = \left(x_2^0 - x_1^0\right)^2 - \left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 - \left(x_2^2 - x_1^1\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2 \tag{15}$$

Sea $\sum'$ otro observador inercial que se mueve con velocidad v respecto a $\sum$, y sea $\left(x_2^{'0}, x_2^{'1}, x_2^{'2}, x_2^{'3}\right)$ y $\left(x_1^{'0}, x_1^{'1}, x_1^{'2}, x_1^{'3}\right)$ las coordenadas de los dos eventos P_1 y P_2 medidos por $\sum'$. Para este observador el intervalo espacio-tiempo entre los dos eventos es:

$$\triangle S_{12}^{'2} = \left(x_2^{'0} - x_1^{'0}\right)^2 - \left(x_2^{'1} - x_1^{'1}\right)^2 - \left(x_2^{'2} - x_2^{'2}\right)^2 - \left(x_2^{'3} - x_2^{'3}\right)^2 \tag{16}$$

Usando las transformaciones de Lorentz (10), expresemos el intervalo espacio-tiempo medido por $\sum'$ en términos de las coordenadas del observador $\sum$.

$$\begin{aligned}\triangle S_{12}^{'2} = &\left(\tfrac{\gamma}{\sqrt{k}}\right)^2 \left(\sqrt{k} x_2^0 - kv x_2^1 - \sqrt{k} x_1^0 + kv x_1^1\right)^2 \\ &- \left(\tfrac{\gamma}{\sqrt{k}}\right)^2 \left(\sqrt{k} x_2^1 - kv x_2^0 - \sqrt{k} x_1^1 + kv x_1^0\right)^2 \\ &- \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle S_{12}^{'2} = &\tfrac{\gamma^2}{k} \left[\sqrt{k}\left(x_2^0 - x_1^0\right) - kv\left(x_2^1 - x_1^1\right)\right]^2 \\ &- \tfrac{\gamma^2}{k} \left[\sqrt{k}\left(x_2^1 - x_1^1\right) - kv\left(x_2^0 - x_1^0\right)\right]^2 - \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle S_{12}^{'2} = &\tfrac{\gamma^2}{k} \left[\begin{array}{c} k\left(x_2^0 - x_1^0\right)^2 - 2k\sqrt{k}v\left(x_2^0 - x_1^0\right)\left(x_2^1 - x_1^1\right) \\ +k^2v^2\left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 \end{array}\right] \\ &- \tfrac{\gamma^2}{k}\left[k\left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 - 2k\sqrt{k}v\left(x_2^0 - x_1^0\right)\left(x_2^1 - x_1^1\right) + k^2v^2\left(x_2^0 - x_1^0\right)^2\right] \\ &- \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2\end{aligned}$$

Eliminando términos semejantes, se tiene,

$$\begin{aligned}\Delta S_{12}'^2 &= \gamma^2\left(x_2^0 - x_1^0\right)^2 - \gamma^2 kv^2\left(x_2^0 - x_1^0\right)^2 + \gamma^2 kv^2\left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 \\ &\quad -\gamma^2\left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 - \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2 \\ &= \gamma^2\left(1 - kv^2\right)\left(x_2^0 - x_1^0\right)^2 - \gamma^2\left(1 - kv^2\right)\left(x_2^1 - x_1^1\right)^2 \\ &\quad - \left(x_2^2 - x_1^2\right)^2 - \left(x_2^3 - x_1^3\right)^2\end{aligned}$$

Utilizando el resultado, que relaciona el parámetro γ, con la constante universal k, ecuación (6), se observa que, $\gamma^2\left(1-kv^2\right)=1$, con lo cual se tiene,

$$\triangle S_{12}^{\prime 2}=\left(x_2^0-x_1^0\right)^2-\left(x_2^1-x_1^1\right)^2-\left(x_2^2-x_2^2\right)^2-\left(x_2^3-x_2^3\right)^2 \qquad (17)$$

De esta manera, según las ecuaciones (16) y (18), se puede concluir que, $\Delta S_{12}^{\prime 2}=\Delta S_{12}^2$, que indican que las TL deducidas en la sección 1 dejan invariante el intervalo espacio-temporal. Por lo tanto, ΔS_{12}^2 sigue siendo un invariante físico, y con lo cual, va a jugar un papel fundamental en el problema de la causalidad en física.

3. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado la teoría especial de la relatividad. de una manera diferente. Luego de encontrar el teorema de adición de velocidades que se obtiene partiendo del principio de la relatividad, se ha llegado a deducir las transformaciones de Lorentz, con dicho teorema. Aparece entonces un parámetro o constante universal k que para nada crea obstáculos en el teorema ni en las transformaciones de Lorentz. Por otro lado, en las consecuencias estudiadas, tales como, la dilatación del tiempo, la contracción de longitudes e invarianza espacio temporal, se observa que la constancia de la velocidad de la luz no es un factor que se haga necesario, y es reemplazado por la constante universal k. Además, los resultados obtenidos se reducen a los de la relatividad especial con sus dos postulados cuando se hace $k=\frac{1}{c^2}$.

Se concluye entonces que no es necesario el postulado de la constancia de la velocidad de la luz para deducir las transformaciones de coordenadas de Lorentz y sus consecuencias, en las condiciones de homogeneidad, isotropía y suavidad del espacio-tiempo. Sin embargo, resultaría interesante investigar que sucede al introducir variaciones en las propiedades del espacio y del tiempo y revisar como quedarían replanteados otros campos de la física como son la dinámica relativista y la electrodinámica relativista. ¿Será posible que en estos desarrollos se llegue a que necesariamente k debe ser igual a $\frac{1}{c^2}$ o se mantendrá el hecho de que $k=\frac{1}{c^2}$ sea sólo un caso especial de la teoría planteada en este trabajo?. Queda abierta la discusión[2].

Referencias

[1] Tejeiro, J. M., Sobre la teoría especial de la relatividad. Universidad Nacional 1998.

[2] Mermin, N. D., Relativity without light. Am. j. phys.**52,** pág. 119, 1984.

[3] French, A. P., Relatividad especial. Reverté. 1988

[4] Resnick R., Introducción a la teoría especial de la relatividad. Limusa. 1977

[5] Sergway, R., Física Tomo II. Cap. 39.Cuarta ed. Mc Graw Hill.1995.

[6] Acosta, V., Cowan, C.L.,Y Grahan, B.J., Curso de física moderna. Cap. 3 al 6. Harla. 1995

[7] Acosta, V., Cowan, C.L.,Y Grahan, B.J., Curso de física moderna. Cap. 3 al 6. Harla. 1995

[8] Garcia, M., EWERT, J., Física moderna. Cap.1. Universidad Nacional.1997