MODOS COLECTIVOS ELECTROMAGNÉTICOS EN BICAPAS CONDUCTORAS EN CONDICIONES DEL EFECTO HALL CUÁNTICO

J. Siado Castañeda[1], R. Vega Monroy[*,1], J. Granada Echeverri[2]
[*]rvega@uniatlantico.edu.co
[1]Grupo de Física Teórica del estado Sólido, Universidad del Atlántico,
Km 7 antigua vía a Puerto Colombia, A.A. 1890, Barranquilla
[2]Departamento de Física, Universidad del Valle

Resumen. En este trabajo se estudió la propagación de un modo colectivo en el limite de bajas frecuencias en bicapas conductoras en condiciones del efecto Hall cuántico. Se encontró que en el límite de longitudes de onda larga el modo colectivo electromagnético presenta una brecha, la cual puede desaparecer al aumentar el factor de ocupación de los niveles de Landau. Además se encontró que para valores del vector de onda menores que un cierto valor umbral, es imposible la propagación del modo.
Palabras Claves: Semiconductores, modos colectivos electromagnéticos, efecto Hall cuántico.

Abstract. In this work we studied the propagation of a collective electromagnetic mode in bilayers under quantum Hall effect conditions. We found that, in the long-wave limit, the collective mode shows a frequency gap, which may disappear when the Landau-level filling factor increases. In addition, we found a threshold value for the wave vector below which the collective electromagnetic mode can not exist.
Keywords: Semiconductors, collective electromagnetic modes, quantum Hall effect.

1. Introducción

Los avances en la tecnología permiten desarrollar nuevos tipos de materiales y cada vez con menor dimensionalidad. Este hecho se demuestra con la fabricación de bicapas, las cuales se presentan como sistemas electrónicos con gran movilidad. Este tipo de sistemas generalmente se basan en heterojunturas del tipo $GaAs - AlGaAs$ donde una delgada capa electrónica se forma en la interface de los dos semiconductores.

La presencia de un campo magnético H sumante fuerte, perpendicular al sistema electrónico, conlleva en estos sistemas electrónicos a la cuantización de la conductividad electrónica lo que permite la observación del conocido efecto Hall cuántico. En este sentido resulta natural estudiar el espectro de modos colectivos electromagnéticos en bicapas propiciados por la interación electrónica entre las dos capas a través de un campo electromagnético. Muchos autores [1]-[4] han estudiado excitaciones colectivas en superredes infinitas en condiciones del efecto Hall cuántico, incluso en [5] ha sido estudiado el espectro de oscilaciones electromagnéticas colectivas en bicapas pero para el caso de frecuencias bajas en este trabajo se encuentra que la velocidad de propagación del modo es cercana a la velocidad de la luz en el dieléctrico. En el presente trabajo siguiendo el formalismo desarrollado en [6], se muestra que para el caso de frecuencias bajas el modo colectivo excitado en una bicapa en codiciones del efecto Hall cuantico posee una frecuencia que se cuantiza.

La conductividad eléctrica de la capa bidimensional es descrita por el tensor de conductividad:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

siendo, para el caso de frecuencias bajas en condiciones del efecto Hall cuántico, las componentes de Hall igual al cuanta de Hall $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = e^2 n/\hbar$, en tanto las componentes diagonales $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0$. n es el factor de ocupación de los niveles de Landau, el cual se define como:

$$n = \pi l^2 \rho,$$

donde ρ y $l = (c\hbar/eH)^{1/2}$ son la densidad electrónica bidimensional y la longitud magnética.

2. Modelo y Ecuaciones Básicas

El modelo considerado representa dos capas electrónicas bidimensionales embebidas en un dieléctrico cuya función dieléctrica está dada por:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon\left[\theta(-z) + \theta(z-d) + \theta(z) + \theta(d-z)\right], \tag{2}$$

siendo $\theta(z)$ la función de Heavyside y d la separación entre los planos electrónicos, la cual es suficientemente grande, de tal manera que se desprecia el tunelamiento electrónico.

De manera general, se tiene que las ecuaciones de Maxwell, en presencia de una fuente externa $\vec{j}^{ext}$ y corrientes bidimensionales inducidas, están dadas en el sistema gausiano por las ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}^{ext} + \vec{j}^{2D}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

donde $\vec{j}^{2D}$ fluye solamente en los planos 2D conductores localizados en $z = d$ y tiene la siguiente forma:

$$j_i^{2D}(\vec{r}, t) = \sigma_{ij}\left[E_j(\vec{r}_{\shortparallel}, 0, t)\,\delta(z) + E_j(\vec{r}_{\shortparallel}, d, t)\,\delta(z-d)\right]. \tag{4}$$

σ_{ij} es tensor de conductividad bidimensional. Si se tiene en cuenta que el vector de desplazamiento es $\vec{D} = \varepsilon(z)\vec{E}$ y la expresión (4), cambiando de representación a través de una transformada de Fourier, es posible escribir las ecuaciones (3) de la siguiente manera:

$$\Pi_{ij}\vec{A}_j\left(\vec{r}_{\shortparallel},t\right)+i\frac{4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2}\left[A_j\left(\vec{r}_{\shortparallel},0,\omega\right)\delta\left(z\right)+A_j\left(\vec{r}_{\shortparallel},d,\omega\right)\delta\left(z-d\right)\right] \quad (5)$$
$$=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_i^{ext}\left(\vec{r},\omega\right).$$

En esta ecuación se introdujo el operador:

$$\Pi_{ij}=\varepsilon\left(z\right)\frac{\omega^2}{c^2}\delta-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\nabla^2\delta_{ij}. \quad (6)$$

S i se toma que, como fue mostrado en [7], el potencial magnético A_j y la densidad de corriente externa j_k^{ext} se pueden relacionar a través de la ecuación:

$$A_j\left(\vec{r}_{\shortparallel},z,\omega\right)=-\frac{1}{c}\int d^3\vec{r}'_{\shortparallel}D_{jk}\left(\vec{r}_{\shortparallel},\vec{r}'_{\shortparallel},\omega\right)j_k^{ext}\left(\vec{r}',\omega\right), \quad (7)$$

es posible reescribir la ecuación (5) de la siguiente manera

$$\Pi_{ij}D_{jk}\left(\vec{r},\vec{r}',\omega\right)+\frac{i4\pi\omega\sigma_{ij}}{c^2}\left[\begin{array}{c}D_{jk}\left(\vec{r}_{\shortparallel},\vec{r}'_{\shortparallel},0,\omega\right)\delta\left(z\right)+\\ D_{jk}\left(\vec{r}_{\shortparallel},\vec{r}'_{\shortparallel},d,\omega\right)\delta\left(z-d\right)\end{array}\right] \quad (8)$$
$$=4\pi\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right).$$

En esta ecuación se tuvo en cuenta la propiedad de la función delta de Dirac:

$$j_i^{ext}\left(\vec{r},\omega\right)=\delta_{ik}\int j_k^{ext}\left(\vec{r}',\omega\right)\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)d^3\vec{r}'. \quad (9)$$

Tomando la forma de Fourier de D_{jk} y teniendo en cuenta que el vector de onda $(k_x,k_y,0)$ lo podemos rotar al vector $\left(k_{\|},0,0\right)$ al introducir en la ecuación (8) el operador unitario $\hat{S}\left(k_{\|}\right)$ el cual satisface la condición:

$$\hat{S}\left(k_{\|}\right)\hat{S}^{-1}\left(k_{\shortparallel}\right)=\hat{I} \quad (10)$$

y cuya representación matricial es:

$$\hat{S}\left(k_{\|}\right)=\frac{1}{k_{\shortparallel}}\left(\begin{array}{ccc}k_x & k_y & 0\\ -k_y & k_x & 0\\ 0 & 0 & k_{\shortparallel}\end{array}\right) \quad (11)$$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\hat{\Pi}_{ij}\left(k_{\shortparallel},z\right)\hat{g}_{ij}\left(z,z'\right)+i\frac{4\pi\omega}{c^2}\sigma_{ij}\left[\hat{g}_{ij}\left(0,z'\right)\delta\left(z\right)+\hat{g}_{ij}\left(z,z'\right)\delta\left(z-d\right)\right]=4\pi\delta\left(z-z'\right) \quad (12)$$

donde $\hat{g}_{ij}\left(z,z'\right)=\hat{S}\left(k_{\|}\right)d_{ij}\hat{S}^{-1}\left(k_{\shortparallel}\right)$, siendo d_{ij} la forma de Fourier de D_{ij}.

La solución a esta ecuación para el propagador $\hat{g}_{ij}$ se busca en la forma:

$$\hat{g}_{ij}=A_{ij}e^{-iq_\omega(z-z\prime)}+B_{ij}e^{iq_\omega(z-z\prime)}, \quad (13)$$

donde

$$q_\omega^2 = k_{\shortparallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} n_o^2.$$

$n_o = \sqrt{\varepsilon}$ es el índice de refracción del medio.

Si se denota por $\hat{g}_{ij}^{I}(z, z')$, $\hat{g}_{ij}^{II}(z, z')$, $\hat{g}_{ij}^{III}(z, z')$, las componentes de $\hat{g}_{ij}(z, z')$ en la región I ($z < 0$), II ($0 < z < d$) y III ($d < z$), después de aplicar las condiciones de frontera:

$$\left[\hat{g}_{ij}^{I} - \hat{g}_{ij}^{II}\right]_{z=0} = 0, \; \left[\hat{g}_{ij}^{II} - \hat{g}_{ij}^{III}\right]_{z=d} = 0, \tag{14}$$

$$\left[\frac{\varepsilon}{q_\omega^2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{xx}^{II}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_{xj}^{I}}{\partial z}\right) - \frac{i4\pi\sigma_{xi}}{\omega}\hat{g}_{ij}^{I}\right]_{z=0} = 0, \tag{15}$$

$$\left[\frac{\varepsilon}{q_\omega^2}\left(\frac{\partial \hat{g}_{xj}^{III}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_{xj}^{II}}{\partial z}\right) - \frac{i4\pi\sigma_{xi}}{\omega}\hat{g}_{ij}^{III}\right]_{z=d} = 0, \tag{16}$$

$$\left[\frac{\partial \hat{g}_{yj}^{II}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_{yj}^{I}}{\partial z} + \frac{i4\pi\omega\sigma_{yi}}{c^2}\hat{g}_{ij}^{I}\right]_{z=0} = 0, \tag{17}$$

$$\left[\frac{\partial \hat{g}_{xj}^{III}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{g}_{xj}^{II}}{\partial z} + \frac{i4\pi\omega\sigma_{ix}}{c^2}\hat{g}_{ij}^{III}\right]_{z=d} = 0, \tag{18}$$

se obtiene un sistema de ecuaciones algebráicas que relacionan los coeficientes A_{ij} y B_{ij} del propagador $\hat{g}_{ij}(z, z')$ en la región II para $z = 0$ y $z = d$ [6]. El determinate igual a cero

$$\begin{vmatrix} f_- & f_+ & f_H & f_H \\ bf_+ & af_- & bf_H & af_H \\ g_H & g_H & g_- & g_+ \\ bg_H & ag_H & bg_+ & ag_- \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

de la matriz resultante determina las leyes de dispersión de los modos colectivos en el sistema analizado.

En la ecuación anterior se introdujeron los parámetros:

$$a = e^{-q_\omega d}, \; b = e^{q_\omega d}, \; f_+ = \frac{2\varepsilon}{q_\omega} + i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{xx}, \; f_- = i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{xx}, \tag{20}$$

$$g_+ = 2q_\omega - \frac{i4\pi\omega}{c^2}\sigma_{yy}, \; g_- = -\frac{i4\pi\omega}{c^2}\sigma_{yy}, \; f_H = i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_{yx}, \; g_H = i\frac{4\pi\omega}{c^2}\sigma_{yx}. \tag{21}$$

Después de algunos cálculos sencillos, se obtiene la siguiente ley de dispersión para el modo colectivo en el límite de bajas frecuencias para longitudes de onda larga $q_\omega d \ll 1$:

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{k}_{\|}^2 + (4\Gamma)^2\left[\Gamma^2 + 1\right], \tag{22}$$

donde se intodujeron las magnitudes adimensionales:

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega d}{c} n_o, \qquad \Gamma = \frac{n_o}{4\pi n \alpha}, \qquad \tilde{k}_{\|} = k_{\|} d. \tag{23}$$

$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ es la constante de la estructura fina.

De la ecuación (22) se ve que el modo colectivo presenta un comportamiento líneal con respecto al vector de onda $k_{\|}$, teniendo una brecha en el límite longitudes de onda larga de $(4\Gamma)^2 \left[\Gamma^2 + 1\right]$. Para valores de n del orden de

$$n \sim \frac{n_o}{4\pi\alpha} \tag{24}$$

la brecha de la frecuencia cuando $k_{\|} d \to 0$ desaparece, presentando entonces el modo un comportamiento líneal con velocidad de fase igual a la velocidad de la luz en el dielectrico $v_p = c/n_o$.

3. Conclusiones

En condiciones del efecto Hall cuántico en bicapas conductoras en el límite de frecuencias bajas es posible la propagación de un modo colectivo electomagnetico que en el límite de longitudes de onda larga presenta una brecha que aumenta al disminuir el factor de ocupación de los niveles de Landau.

Los autores agradecen a la Universidad del Atlántico por la financiación de este trabajo a través de la convocatoria "Pensar el Caribe Colombiano II".

Referencias

[1] L.Wendler and M.I. Kaganov, Phys. Stat. Sol. B 142, K63 (1987)

[2] Y.V. Bludov, Radiophysics and Electronics 3, 106 (1998)

[3] V.M. Gvozdikov and R. Vega Monroy, Low Temp. Phys. 25, 802 (1999).

[4] V.M. Gvozdikov, A.M. Ermolaev, I.D. Vagner and R. Vega Monroy, Physica B 284-288, 1734(2000)

[5] I.E. Aronov, N.N. Beletskii, Phys. Rev. B 56, 10392 (1997)

[6] G. Becerra, J.C. Granada, Rev. Col. Fis. 36, 26 (2004)

[7] A.A. Maradudin, D.L. Mills, Phys. Rev. B 11, 1392 (1975)